Benemérita
Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación

ANTOLOGIA

ALGORITMOS Y ESTRUCTURAS DE DATOS

GRAFOS

M.C. Pedro Bello López

Primavera 2007

CONTENIDO

1. Introducción

GRAFOS

Esta antología es una introducción a la teoría de grafos. Los grafos son estructuras discretas compuestas por nodos (llamados vértices) y arcos (llamadas aristas) que conectan algunos pares de esos nodos.

Son una abstracción útil para modelar diversas situaciones reales como por ejemplo: redes de computadoras, redes telefónicas o eléctricas, circuitos eléctricos, sistemas de carreteras, sistemas de transporte y distribución de mercancías y sistemas organizacionales.

1.1 Definiciones y conceptos básicos

Grafos simples

Un grafo simple es un par $G = (V;E)$ donde V es un conjunto finito no vacío de elementos llamados vértices y E es un conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de V llamados aristas.

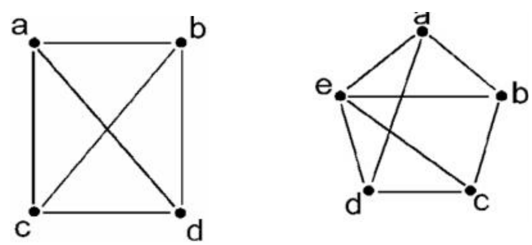

Fig. 1.1 Grafos simples

Nodos Adyacentes

Dos nodos son adyacentes si hay un arco(arista) que los conecte.

Camino
Secuencia de nodos, en la que cada par de nodos son adyacentes

Camino Simple
Es un camino en el que todos los nodos contenidos son diferentes, con la posible excepción del primero y el último, que podrían ser el mismo.

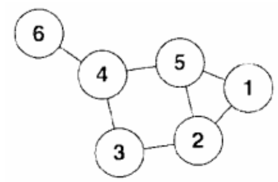

Fig. 1.2. Camino simple: 6-4-5-2

Grafo no dirigido
Los arcos en el grafo no tienen una dirección particular, es decir, son bidireccionales. Ejemplos figuras 1.1 y 1.2.

Grafo dirigido (Dígrafo)
Los arcos en el grafo tienen una dirección asociada. El primer elemento del arco es el origen y el segundo es considerado el destino.

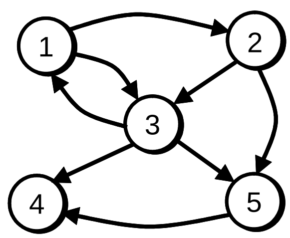

Fig. 1.3. Digrafo

Grafo ponderado
Cada arco del grafo tiene asociado un peso o valor. Generalmente el peso está relacionado con costos, distancias y similares.

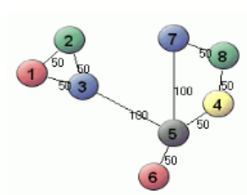

Fig. 1.4. Grafo ponderado

Ciclo
En un grafo dirigido, el ciclo es un camino donde el nodo de inicio y el nodo de terminación son el mismo

Grafo conectado (Conexo)
Un grafo no dirigido es conectado si hay un camino de cualquier nodo hacia cualquier otro en el grafo

Dígrafo fuertemente conectado
Un grafo dirigido se considera fuertemente conectado si hay un camino desde cualquier nodo hacia cualquier otro en el grafo.

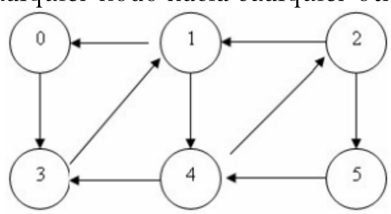

Fig. 1.5. Dígrafo fuertemente conectado.

Dígrafo débilmente conectado
Un grafo dirigido se considera débilmente conectado si su grafo no dirigido correspondiente está conectado, pero no hay caminos para llegar de cualquier nodo hacia cualquier otro.

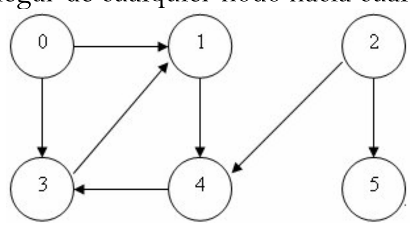

Fig. 1.6. Dígrafo débilmente conectado.
Del nodo 5 no se puede ir a ningún nodo.

Grado de un grafo
Es el máximo grado de sus nodos, donde éste se define como la cantidad de arcos que inciden en ese nodo. En el caso de dígrafos se distingue entre *grado_entrada* y *grado_salida*. El primero define la cantidad de arcos en los que el nodo es el destino y el segundo es la cantidad de arcos donde es el origen.

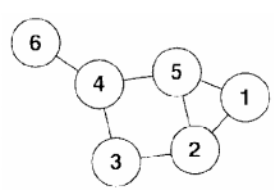

Fig. 1.7. Grado del grafo=3

Corolario 1.1. En todo grafo $G = (V;E)$ el número de vértices de grado impar es par.

1.2 Árbol

Un árbol es un grafo conexo y acíclico.
En la figura 1.2.1 se representa un árbol con 13 vértices y 12 aristas.

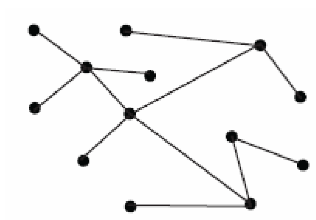

Fig. 1.2.1 Árbol

1.3 Componentes conexas

Una componente conexa de un grafo *G* es un subgrafo conexo maximal de *G*, es decir un subgrafo conexo que no está propiamente contenido en ningún otro subgrafo conexo de *G*.

El grafo de la figura 1.3.1 tiene cuatro componentes conexas, una de las cuales es un solo vértice.

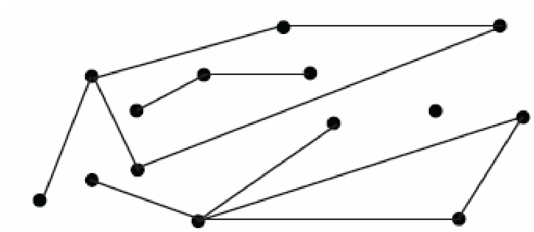

Fig. 1.3.1 Componentes Conexas

Las componentes conexas de un grafo son disjuntas, y el grafo es la unión de ellas. Si un grafo es acíclico entonces cada una de sus componentes conexas es un árbol, por ello a los grafos acíclicos se les llama **bosques**.

2. Grafos isomorfos

Dos grafos *G* = (*V* ; *E*) y *G'* = (*V* ‘; *E'*) son isomorfos si existe una biyección *f* : *V* ! *V* ‘ que preserva la relación de adyacencia, es decir tal que:

$$\{u,v\} \in E \quad \text{si y sólo si} \quad \{f(u), f(v)\} \in E'$$

Ejemplo Los dos grafos representados en la figura 2.1 son isomorfos, ya que la función *f* que lleva *a* en *a'*, *b* en *b'*, *c* en *c'* y *d* en *d'* es una bisección y preserva la adyacencia.

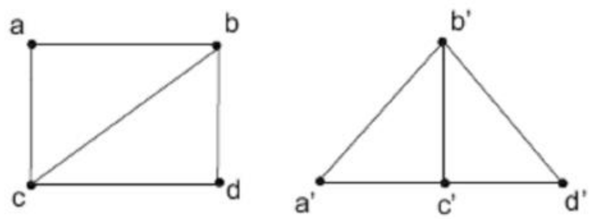

Fig 2.1 Grafos isomorfos

Dos grafos isomorfos deben tener el mismo número de vértices. Más aún todas las propiedades que se deriven de la relación de adyacencia deben ser idénticas en ambos, en particular deben tener el mismo número de aristas, el mismo número de vértices aislados y la misma sucesión de grados. Para los fines de la teoría de grafos, dos grafos isomorfos se consideran idénticos.

Dos grafos con idénticas sucesiones de grados tienen el mismo número de vértices y de aristas, pero esto no es suficiente para que los grafos sean isomorfos, como muestran los dos grafos representados en la figura 2.2. Ambos tienen sucesión de grados 1, 1, 1, 2, 3, 3, pero no son isomorfos ya que en el de la izquierda el único vértice de grado 2 es adyacente a un vértice de grado 1 y a otro de grado 3, mientras que en el grafo de la derecha el único vértice de grado 2 es adyacente a dos vértices de grado 3.

Fig 2.2 Grafos no isomorfos

3. Grafos completos

Se llama grafo completo de n vértices a un grafo con n vértices v_1, v_2,. . . , v_n cuyas aristas son todos los pares $\{v_1; v_j\}$ con $1 \leq i < j \leq n$.

Todos los grafos completos de n vértices son isomorfos, y se les denota como K_n. El número de aristas de K_n es $n(n-1)/2$. En la figura 3.1 se representan los grafos completos de orden 1 a 5.

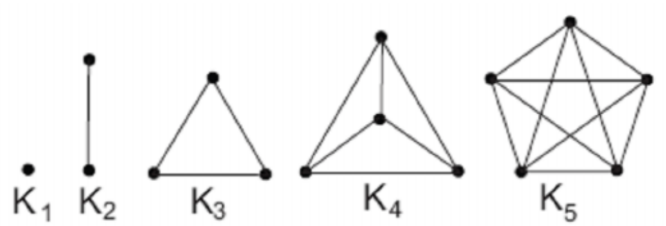

Fig 3.1 Grafos completos

3.1 Grafos Bipartitos

Un grafo $G = (V; E)$ se dice que es bipartito si el conjunto de vértices V puede particionarse en dos subconjuntos $V1$ y $V2$ tales que todas las aristas tengan un extremo en $V1$ y el otro en $V2$.

En la figura 3.1.1 se representa un grafo bipartito con $V1 = \{s, t, u, v\}$ y $V2 = \{x, y, z\}$. Si $|V1| = m$, $|V2| = n$ y $E = V1$ x $V2$ (es decir, si uv es una arista para todo par de vértices $u \in V1$, $v \in V2$) entonces se dice que el grafo es **bipartito completo** y se denota Km,n. En la figura 3.1.2 se representa $K3,2$.

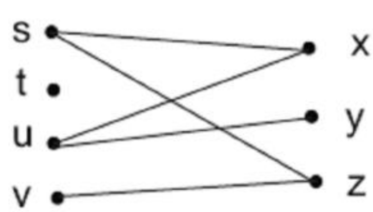

Fig 3.1.1 Grafo bipartito

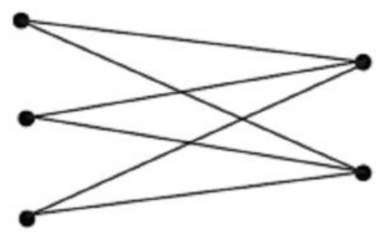

Fig 3.1.2 Grafo bipartito completo K3,2

3.2 Grafo regular

Un grafo $G = (V, E)$ es regular si todos sus vértices tienen el mismo grado. Si el grado común es k se dice que el grafo es k-regular. A los grafos 3-regulares se les llama también grafos cúbicos.

La figura 3.2.1 muestra un grafo cúbico de 8 vértices (precisamente el grafo formado por los vértices y aristas de un cubo).

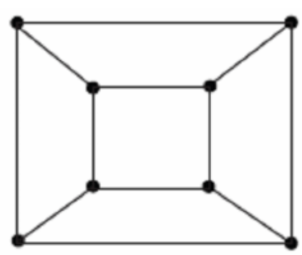

Fig 3.2.1 Grafo 3-regular

4. Grafos de Euler

Un camino en un grafo $G = (V, E)$ es una sucesión alternada de vértices y aristas $v_0e_0v_1e_1 \ldots v_{k-1}\,e_{k-1}\,v_k$ donde $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ para $i = 0, 1, \ldots k-1$. Si $v_0 = v_k$ el camino se dice cerrado, de lo contrario se dice abierto. Un camino es de Euler si incluye a cada arista del grafo exactamente una vez. Un grafo es de Euler(o euleriano) si admite un camino euleriano cerrado.

Un grafo es euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

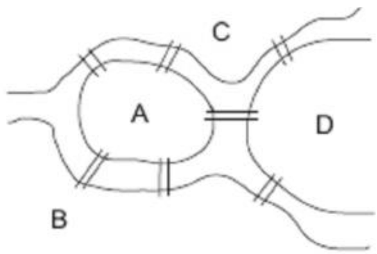

Fig 4.1 Los siete puentes de Konigsberg.

La ciudad de Konigsberg, capital de Prusia oriental en el siglo XVIII, era atravesada por el río Pregel, sobre el cual había siete puentes (ver figura 4.1).

Los habitantes de la ciudad se preguntaban si era posible salir de su casa, dar un paseo y regresar al punto de partida, habiendo pasado una y sólo una vez por cada puente.

Euler resolvió el problema en 1735. Observemos que las regiones en que estaba dividida Konigsberg y los 7 puentes pueden representarse como se ve en la figura 4.2. Como hay vértices de grado impar, este grafo no es euleriano. Más aún, como hay más de dos vértices de grado impar ni siquiera admite un camino euleriano abierto.

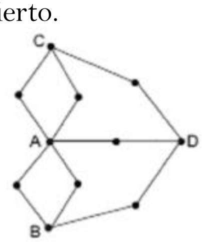

Fig 4.2 Grafo de Konigsberg.

4.1 Ciclo de euler

Sea G un grafo no dirigido se dice que G tiene un ciclo de Euler si existe un ciclo en G que cumpla las siguientes condiciones:

- Visita todo vértice y toda arista de G
- Cada arista se visita exactamente una vez

Si G es un grafo no dirigido. Entonces G tiene un ciclo de Euler si, y sólo si, es conexo y todo vértice tiene grado par

5. Grafos Hamiltonianos

Un ciclo hamiltoniano en un grafo es un ciclo que contiene a todos los vértices del grafo. Un grafo es hamiltoniano si contiene un ciclo hamiltoniano. Un camino hamiltoniano es un camino que contiene a todos los vértices.

Observe que un ciclo hamiltoniano debe contener todos los vértices, pero no necesariamente todas las aristas.

Si $n \geq 3$ el grafo completo Kn es hamiltoniano. De hecho, cualquier permutación de los vértices de un grafo completo da lugar a un ciclo hamiltoniano. El número de ciclos hamiltonianos en Kn es $(n - 1)!/2$.

El nombre de estos grafos proviene de William Rowan Hamilton (1805-1865), matemático irlandés que propuso como rompecabezas hallar un ciclo que pase por todos los vértices de un dodecaedro regular. El acertijo se facilita si se representa el grafo del dodecaedro en el plano, como en la figura 5.1 A diferencia de lo que ocurre con los grafos eulerianos, no se conoce una condición necesaria y suficiente, sencilla y útil, para que un grafo sea hamiltoniano.

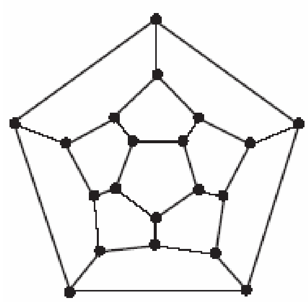

Fig 5.1 Grafo del dodecaedro.

Una obvia condición necesaria es $\delta(G) \geq 2$, pero no es suficiente.

Tampoco es suficiente una condición del tipo $\delta(G) \geq k$, con k constante. Sin embargo se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5.1. (Ore, 1960) Si un grafo tiene $n \geq 3$ vértices y la suma de los grados de cualquier par de vértices no adyacentes es mayor o igual que n, entonces el grafo es hamiltoniano.

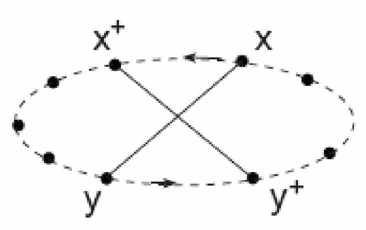

Fig 5.2 Teorema de Ore.

Corolario 5.1. (Dirac, 1952). Si $G = (V, E)$ es un grafo de orden $n \geq 3$ y grado mínimo $\delta(G) \geq n/2$, entonces es hamiltoniano.

6. Grafos planares

Una representación de un grafo $G = (V, E)$ en el plano R^2 es una correspondencia que a cada vértice $v \in V$ le asocia un punto $P_v \in R^2$ y a cada arista $e \in E$ con extremos u y v le hace corresponder una curva continua y sin autointersecciones en R^2 (es decir una función continua e inyectiva de un intervalo cerrado de R en R^2) que tenga como extremos a P_u y P_v. A estas curvas les llamaremos líneas de la representación.

A una representación plana tal que si dos líneas se intersectan lo hacenen un extremo común se le llama **grafo plano**.

Un **grafo es planar** si puede ser representado como un grafo plano. Por ejemplo la figura 6.1 muestra dos representaciones de K_4. En la representación de la izquierda hay dos líneas que se cruzan, por lo tanto no es un grafo plano. La representación de la derecha sí es un grafo plano. Por lo tanto K_4 es planar.

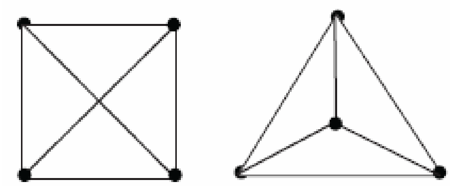

Fig 6.1 K_4 es planar.

Las líneas de un grafo plano dividen al plano en regiones abiertas y disjuntas que se llaman **caras**, y son las componentes conexas del complemento en R^2 de la unión de todas las líneas y puntos del grafo. Como los grafos planos son acotados (porque cada línea lo es), todas sus caras son acotadas excepto una de ellas. Por ejemplo en la figura 6.2 se muestra un grafo plano con 5 caras, 4 acotadas y una no acotada.

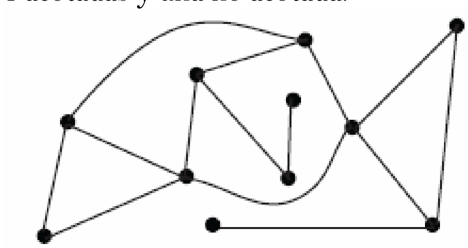

Fig 6.2 Grafo plano con 5 caras.

Teorema 6.1 (Euler). Si un grafo plano conexo tiene V vértices, A aristas y C caras, entonces: $V - A + C = 2$.

7. Aplicaciones varias de Grafos

Gracias a la teoría de grafos se pueden resolver diversos problemas como por ejemplo la síntesis de circuitos secuenciales, contadores o sistemas de apertura.

Los grafos se utilizan también para modelar trayectos como el de una línea de autobus a través de las calles de una ciudad, en el que podemos obtener caminos óptimos para el trayecto aplicando diversos algoritmos como puede ser el algoritmo de Dijkstra.

Para la administración de proyectos utilizamos técnicas como PERT, en las que se modelan los mismos utilizando grafos y optimizando los tiempos para concretarlos.

7.1 Problemas de flujo en redes

Las técnicas de flujo de redes están orientadas a optimizar situaciones vinculadas a las redes de transporte, redes de comunicación, sistema de vuelos de los aeropuertos, rutas de navegación de los cruceros, estaciones de bombeo que transportan fluidos a través de tuberías, rutas entre ciudades, redes de conductos y todas aquellas situaciones que puedan representarse mediante una red donde los nodos representan las estaciones o las ciudades; los arcos los caminos, las líneas aéreas, los cables, las tuberías; y el flujo lo representan los camiones, mensajes y fluidos que pasan por la red.

Supongamos un grafo dirigido **G**= (V, A) con pesos.

- Los nodos representan puntos de una red.
- Las aristas representan canales de comunicación existentes entre dos puntos.
- Los pesos de cada arista **C(v, w)** representan el número máximo de unidades que pueden "fluir" desde el nodo **v** al **w**.

Dos son los problemas fundamentales: El Problema del flujo máximo, es decir, cual es el máximo flujo que puede circular entre dos puntos de una red donde los arcos tienen restricciones en su capacidad, y el Problema de flujo a coste mínimo, que consiste en encontrar el modo más económico de llevar un flujo predeterminado de un nodo a otro.

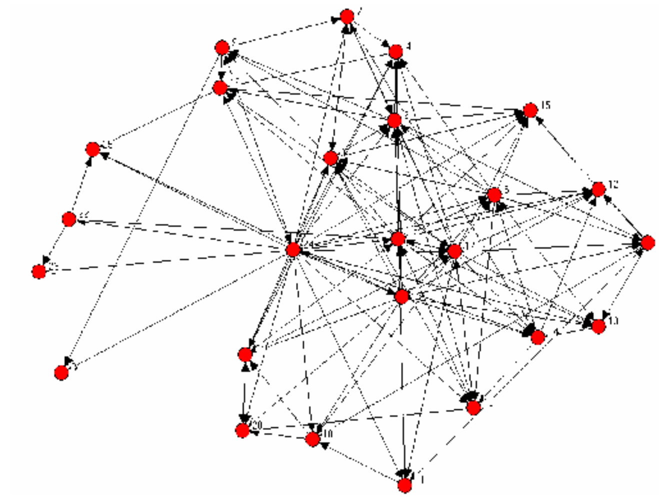

Fig 7.1.1 Grafo que representa las redes de comunicación en España.

7.2 Problema del agente viajero

Un viajante de comercio desea visitar n ciudades volviendo al punto de partida. ¿Qué ruta debe seguir para minimizar la distancia total recorrida?

Dado un grafo no dirigido, completo y con pesos, G, encontrar el ciclo de menor coste que pase por todos los nodos.

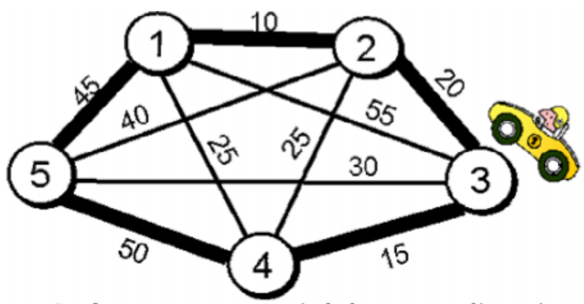

Fig 7.2.1 Grafo que representa 5 ciudades con sus distancias.

- El problema del viajante es un problema NP-completo, equivalente (reducible) al problema del ciclo hamiltoniano.

- No se conoce una solución con tiempo polinómico. Las soluciones conocidas tienen complejidad exponencial.
- Podemos aplicar heurísticas, técnicas probabilistas, algoritmos genéticos, computación con ADN, etc., obteniendo aproximaciones.

7.3 Problema de coloreo de grafos

La coloración de un grafo consiste en asignar un color (o etiqueta) a cada nodo, de forma que dos nodos incompatibles no tengan el mismo color.
El problema de coloración de grafos consiste en realizar una coloración del grafo utilizando un número mínimo de colores.
Un grafo no dirigido G representa ciertos elementos:
Una arista (v, w) representa una incompatibilidad entre los elementos v y w.
Ejemplo: ¿Con cuántos colores, como mínimo, se puede pintar un mapa? Dos regiones adyacentes no pueden tener el mismo color.

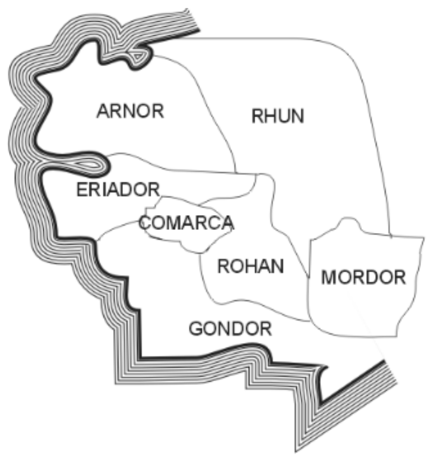

Fig 7.3.1 Mapa de una ciudad.

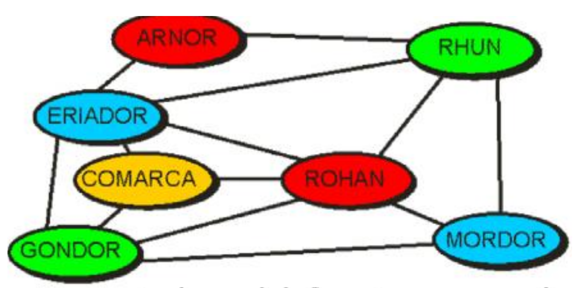

Fig 7.3.2 Grafo que representa el mapa de la figura 7.3.1 que es 4-coloreable.

7.4 Problema de grafos isomorfos

- El isomorfismo de grafos es también un problema NP-completo.

- Ejemplo: Reconocimiento de patrones. Identificar las figuras isomorfas y los puntos "análogos" en ambas.

- La solución consistiría, básicamente, en comprobar todas las posibles asignaciones.

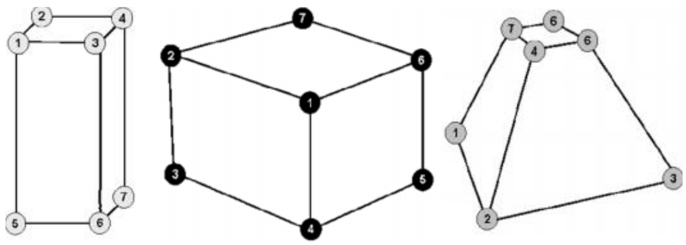

Fig 7.3.2 Figuras isomorfas.

BIBLIOGRAFÍA

- Berge, C., *The Theory of Graphs and its applications*, Methuen & Co -John Wiley & Sons, London - New York, 1962.

- Bollobas, B., *Modern Graph theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.

- Cairó - Guardati, Estructuras de Datos

- Diestel, R., *Graph Theory*, 2nd ed., Springer, New York, 2000.

- Harary, F. *Graph theory*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.

- Joyanes Aguilar Luis, Estructuras de Datos (Libro de Problemas)

- Martínez Roman, Quiroga Elda, Estructuras de datos

- Rodríguez, J., *Teoría de Grafos*, Kariña Editores, Mérida, 2003.