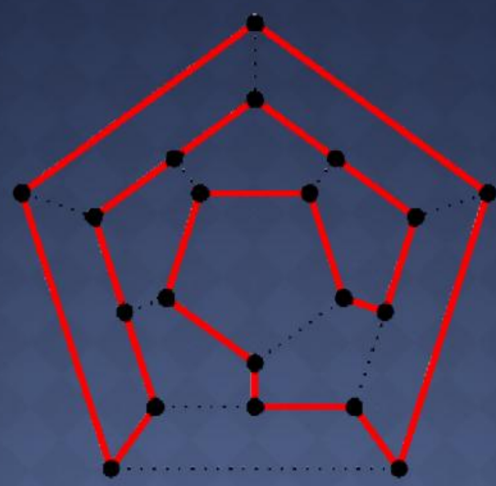
GRAFOS PARTE 2

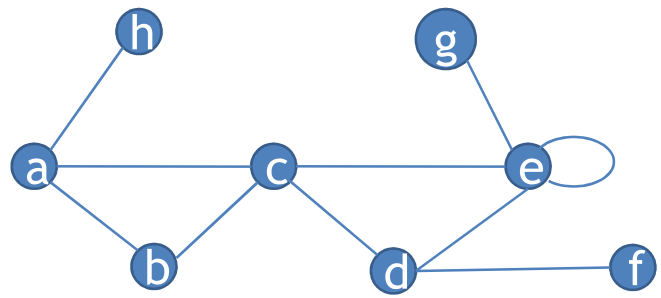


CAMINOS Y CIRCUITOS

- En un grafo se puede recorrer la información de diferentes maneras para llegar de un punto a otro.

Camino	cualquier secuencia de nodos en la que cada par son adyacentes.
Circuito (Ciclo)	Es un camino del vértice w al vértice w que solamente tiene un ciclo en la ruta que sigue
Circuito simple de longitud n	Es aquel camino del vértice w al vértice w que solamente tiene un ciclo en la ruta que sigue
Camino simple de longitud n	Es una sucesión de aristas que van de un vértice x a un vértice w, en donde las aristas que componen dicho camino son distintos e iguales a n, Esto significa que no se puede pasar dos veces por una misma arista.

Ejemplo: Dado el grafo

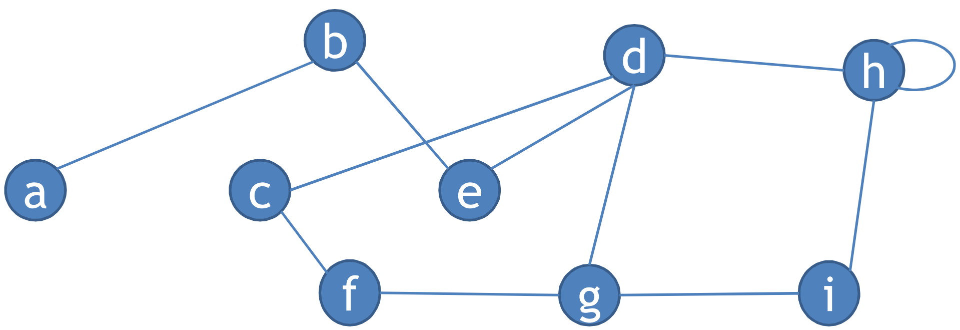


Recorrido	Camino	Camino simple de longitud n	Circuito	Circuito simple de longitud n
{a,b,c,e,d,f}	✓	L = 5		
{a,h,a,b,c}	✓			
{c,e,e,d,c,b}	✓	L = 5		
{d,e,g,e,e,d}	✓		✓	
{e,e}	✓		✓	L = 1
{h,a,b,c,a,h}	✓		✓	
{c,d,e,c}	✓		✓	L = 3
{a,b,c,d,e,c}	✓			
{a,h,a}	✓		✓	L = 2
{b,a,c,d,f}	✓	L = 4		

La longitud del camino o circuito es el numero de vértices que se tocan -1

CAMINO DE EULER

- Es aquel camino que recorre todos los vértices pasando por todos los arcos solamente una vez



Caminos de Euler:

{a,b,e,d,c,f,g,d,h,h,i,g}

{g,i,h,h,d,g,f,c,d,e,b,a}

- Un camino de Euler siempre inicia y termina en un vértice de grado impar.
- Si un grafo tiene mas de dos vértices de grado impar no puede tener caminos de Euler.

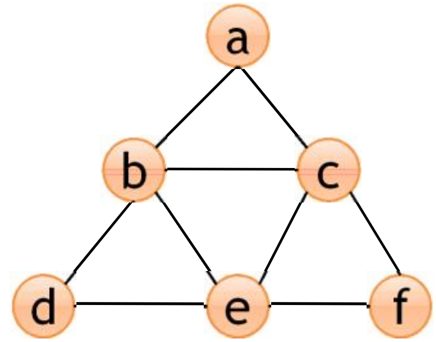
CIRCUITO DE EULER

- Es aquel ciclo que recorre todos los vértices pasando por todos los lados solamente una vez.

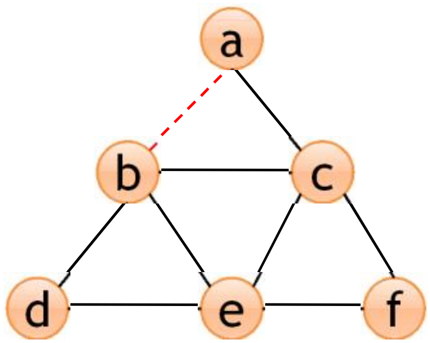
Algoritmo de Fleury para un circuito de Euler

1. Verificar que es conexo con todos los vértices par
2. Seleccionar un vértice arbitrario
3. Seleccionar una arista a partir del vértice actual que no sea puente (es decir que no desconecte el grafo), a menos que no haya otra alternativa
4. Desconectar los vértices que están unidos por la arista seleccionada
5. Si todos los vértices ya están desconectados, ya se tiene el circuito de Euler. De otra forma continuar con el paso 3

Ejemplo de Circuito de Euler

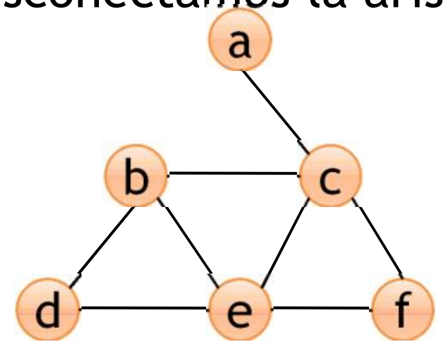


- Iniciamos el recorrido en el nodo a y podemos seleccionar la arista (a,b) o (a,c) ya que no son puentes, consideremos (a,b)



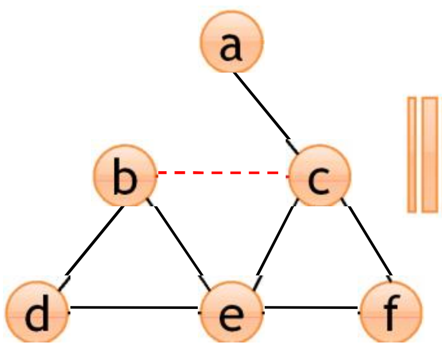
Circuito (a,b)

- Desconectamos la arista

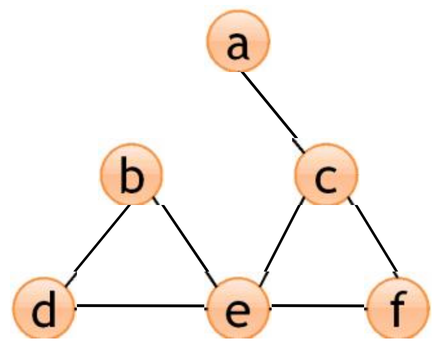


- Ahora podemos tomar (b,c), (b,d) o (b,e), seleccionamos (b,c)

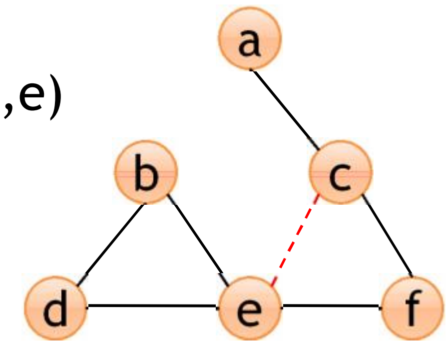
- Desconectamos la arista



Circuito (a,b,c)

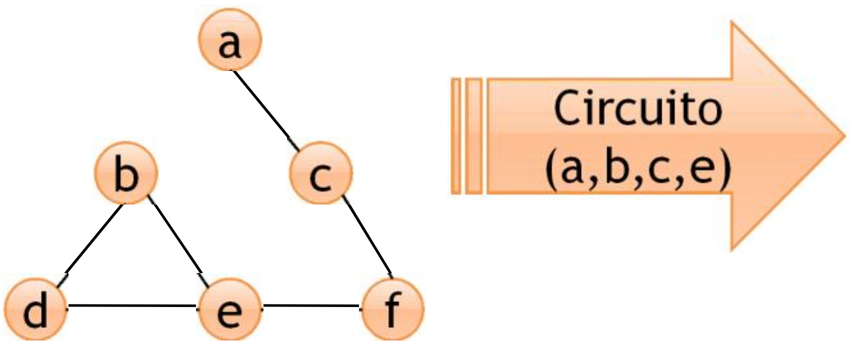


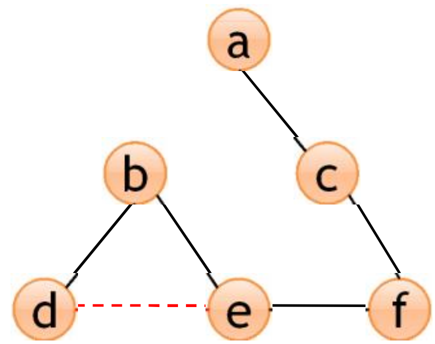
- Del vértice actual c se puede seleccionar (c,e) o (c,f) y no (c,a) ya que se desconectaría el grafo, así seleccionamos (c,e)



  - Eliminando la arista se tiene

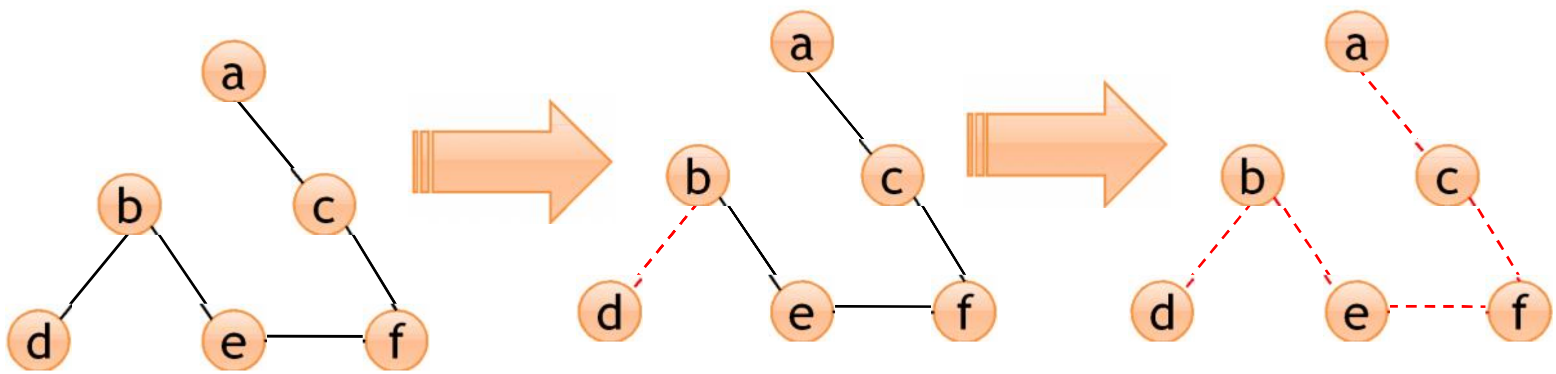
- Seleccionamos (e,d)





- Circuito (a,b,c,e,d)

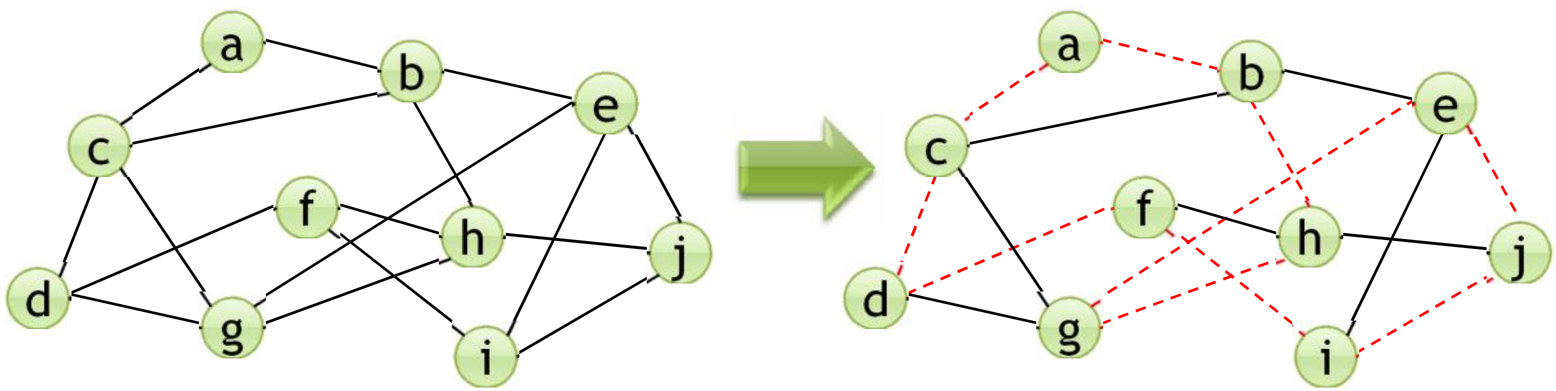
- Ahora solo quedan lados puente por lo que habrá que seleccionarlos



Circuito de Euler (a,b,c,e,d,b,e,f,c,a)

CIRCUITO HAMILTONIANO

- Se trata de un problema similar al del circuito de Euler, con la diferencia que en lugar de pasar por todos los lados del grafo solamente una vez, en el circuito de Hamilton se pasa por cada vértice solamente una vez.

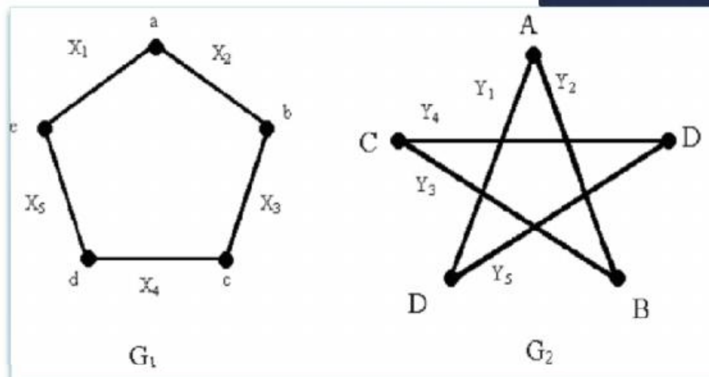


Circuito de Hamilton
{a,b,h,g,e,j,i,f,d,c,a}

ISOMORFISMO

Se dice que dos grafos G_1 y G_2 son isomorfos cuando teniendo apariencia diferente son iguales, porque coinciden en:

- El número de aristas
- El número de vértices
- El conjunto de grados
- Ser o no conexos
- El número de circuitos de longitud n
- Tener o no circuito de Euler



Se sabe además que dos grafos G_1 y G_2 son isomorfos si y sólo si para alguna ordenación de vértices y aristas, sus matrices de incidencia son iguales

EJEMPLO: DETERMINAR SI LOS GRAFOS G_1 Y G_2 SON ISOMORFOS

- Aplicando una función biyectiva a cada vértice de G_1 se mapea en G_2 y una función biyectiva a cada vértice de G_2 se mapea en G_1.

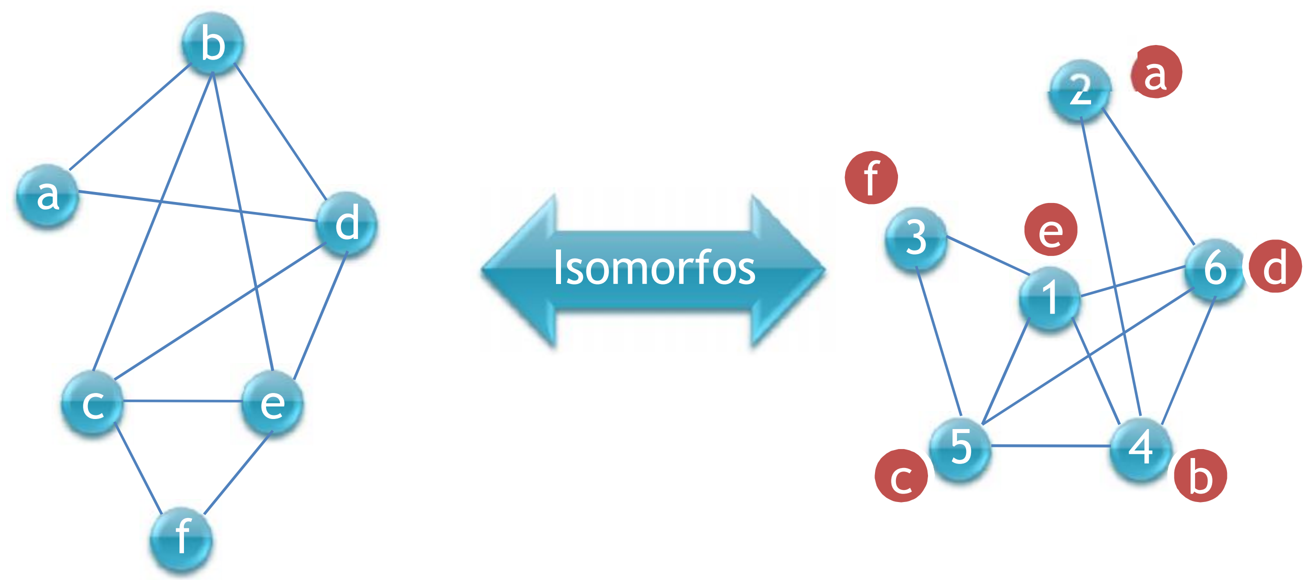
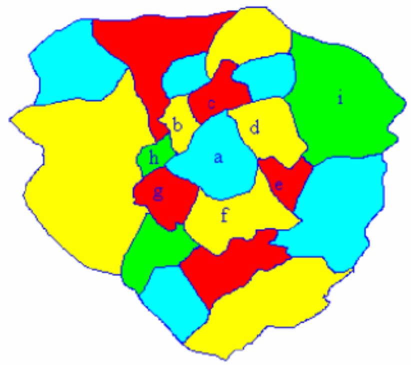


TABLA COMPARATIVA DE G_1 Y G_2

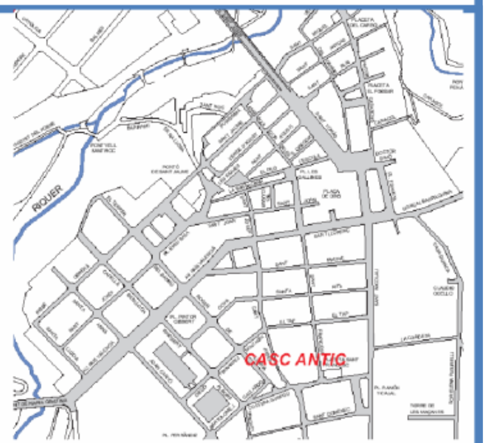
Propiedad	G1	G2	Observación
Número de vértices	6	6	
Número de aristas	10	10	
Grados	2,4,4,4,4,2	4,2,2,4,4,4	Coinciden en el mismo número de vértices y de grados 2 y 4.
Conexo	Si	Si	para cualquier par de vértices se puede encontrar un camino
Camino de Euler	No	No	Todos los vértices son de grado par
Circuito de Euler	Si	Si	Todos los vértices tienen grado par
Circuitos de longitud n (en este caso de longitud 3)	6 a,b,d,a b,e,c,b b,d,c,b b,d,e,b c,d,e,c c,e,f,c	6 1,3,5,1 1,6,4,1 1,4,5,1 1,5,6,1 2,4,6,2 4,5,6,4	En lugar de tener longitud 3, se puede ver cuántos circuitos tienen de longitud 4. Pero en cualquier caso deben de coincidir

APLICACIONES DE GRAFOS

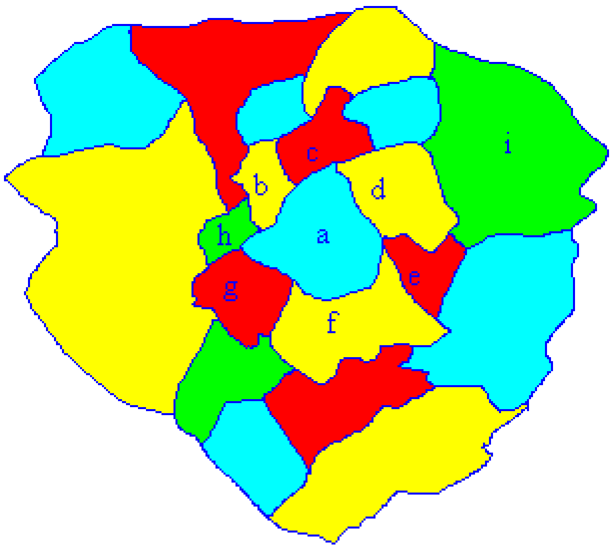
Coloración de grafos



El camino mas corto



COLORACIÓN DE GRAFOS



- Sea G(V,A) un grafo y sea C un conjunto de colores. La coloración de los vértices V del grafo usando un color del conjunto C se encuentra dada por la función.

f: V → C tal que $\forall\ v_1, v_2 \in V$ adyacentes
$f(v_1) \neq f(v_2)$

- Esto significa que cada par de vértices adyacentes deberán estar iluminados con un color diferente
- En la coloración de grafos se busca usar la menor cantidad de colores posible

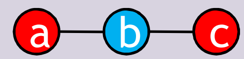
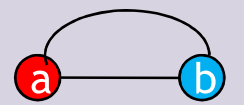
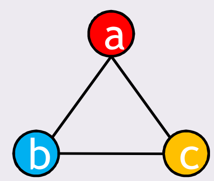
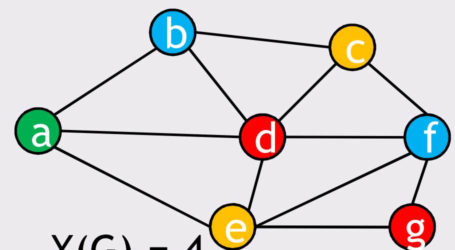
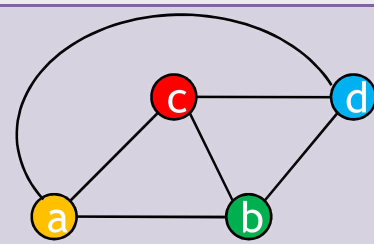
NUMERO CROMÁTICO X(G)

- Se llama número cromático del grafo G al número mínimo de colores con que se puede colorear un grafo, cuidando que los vértices adyacentes no tengan el mismo color.
- Pasos para colorear un grafo:

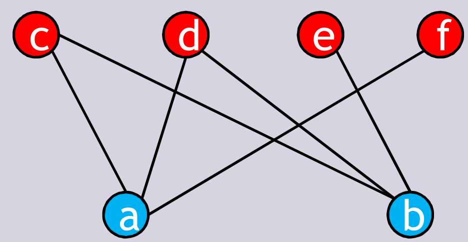
1. Seleccionar el vértice *v* de mayor grado e iluminarlo con cualquier color del conjunto C
2. Colorear los vértices adyacentes al vértice v verificando que no existan vértices adyacentes del mismo color. En caso de ser necesario intercambiar colores. Si ya están coloreados todos los vértices, terminamos, en caso contrario continuar con el paso 3
3. Seleccionar el vértice v de mayor grado que ya este coloreado y que todavía tenga vértices adyacentes sin colorear. Regresar al paso 2

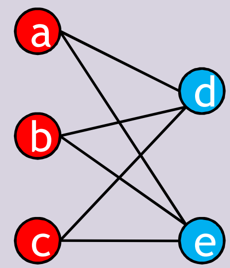
CARACTERÍSTICAS DEL NÚMERO CROMÁTICO

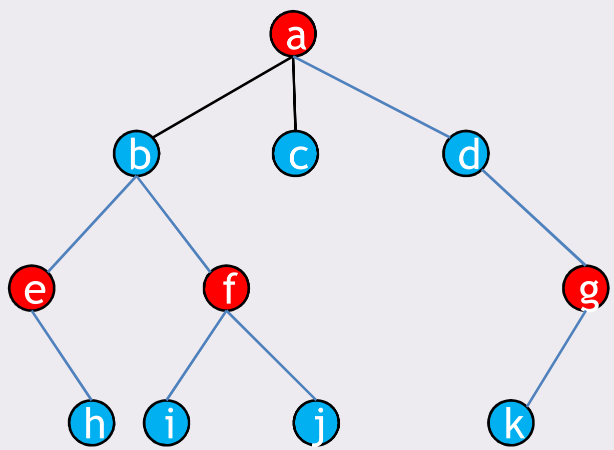
- El número cromático posee las siguientes siete características fundamentales:

1. Un grafo G tiene un X(G) =1 si y sólo si no tiene aristas	 **X(G) = 1**
2. El X(G) para un camino o un ciclo de longitud 2 es X(G)=2 ya que se podrán alternar los colores	  X(G) = 2
3. Si el grafo G tiene un ciclo de longitud impar entonces X(G)≥3	 X(G) = 3  X(G) = 4
4. El número cromático del grafo completo K_n es $X(K_n)=n$, considerando que un grafo K_n todos los vértices son adyacentes entre sí.	 $X(K_4) = 4$

CARACTERÍSTICAS DEL NÚMERO CROMÁTICO

<table>
<tr><td colspan="2">5. En general la mayoría de los grafos tienen un X(G)≤n porque se entiende que no están relacionados todos los vértices entre sí.</td></tr>
<tr><td>6. Los grafos bipartitos o bipartitos completos ($K_{n,m}$) tienen un número cromático X(G) = 2</td><td>

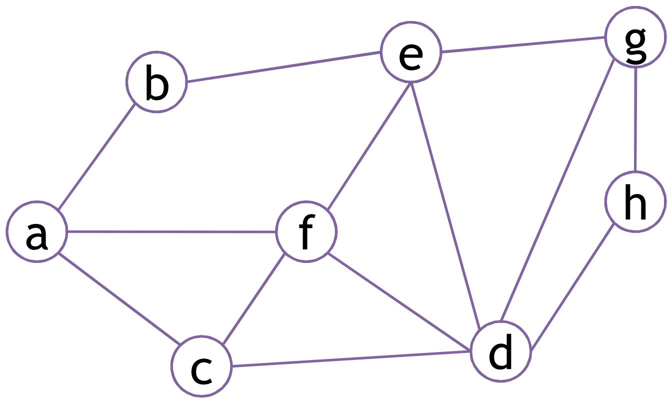
Grafo bipartito


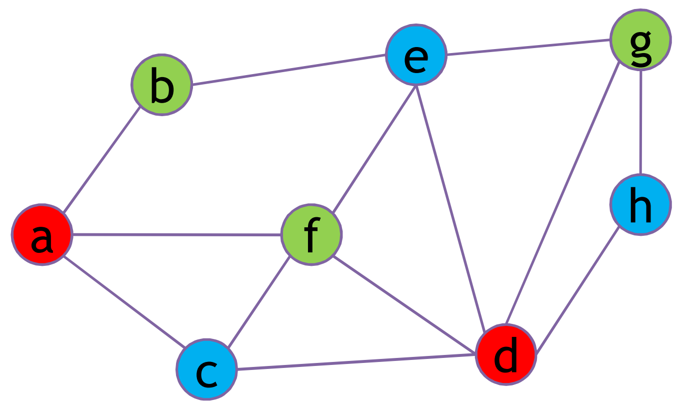
bipartito completo ($K_{2,3}$)</td></tr>
<tr><td>7. Todos los árboles de cualquier orden tienen número cromático X(G)=2 o bien se dice que son 2-coloreable</td><td>

X(G) = 2</td></tr>
</table>

EJEMPLO: COLOREO DE GRAFOS

- Considere que se desea iluminar el siguiente grafo G y que se dispone para ello el conjunto C ={1,2,3,4,5}

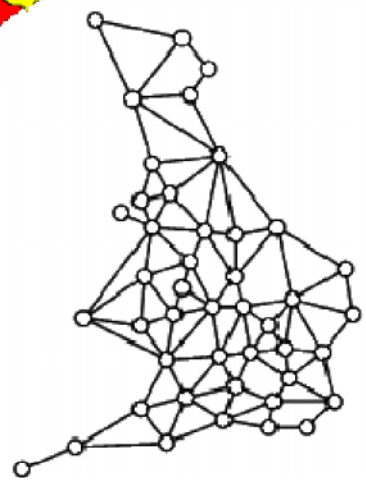


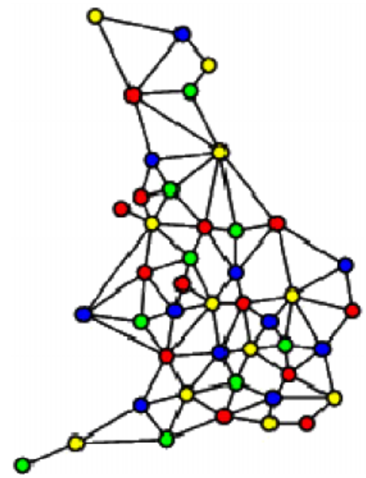


COLORACIÓN DE MAPAS

- Todo mapa puede ser representado por un grafo plano, en donde cada parte del mapa representa un vértice.

Representación con grafos





Teorema de los cuatro colores (Appel y Haken): Cualquier grafo plano puede ser coloreado con cuatro diferentes colores

ALGORITMO DEL CAMINO MAS CORTO

El método más utilizado para encontrar la ruta más corta entre dos vértices es por medio del algoritmo de Dijkstra, el cual consiste en:

- Seleccionar el vértice origen v
- Calcular la distancia del vértice actual v a sus adyacentes
- Elegir la mas corta w
- Calcular la nueva distancia de los vértices adyacentes de w como la suma desde el vértice origen a cada uno de los adyacentes de w
- Elegir la mas corta y repetir el paso anterior hasta visitar todos los vértices del grafo

EJEMPLO: HALLAR EL CAMINO MAS CORTO DEL NODO A AL NODO G